

特異積分方程式法によるせん断応力を受ける長方形き裂のモードII、モードIII応力拡大係数の分布の解析*

(三次元き裂の $K_{II\max}$, $K_{III\max}$ と \sqrt{area} の関係について)野田尚昭^{*1}, 木原利彰^{*2}

Analysis of Variations of Stress Intensity Factors of a Rectangular Crack Subjected to Shear Loading

(Relationship between $K_{II\max}$, $K_{III\max}$ and \sqrt{area})Nao-Aki NODA^{*3} and Toshiaki KIHARA^{*3} Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

In this paper, a singular integral equation method is applied to calculate the stress intensity factor along crack front of a 3D rectangular crack in an infinite body under mixed mode loading. The body force method is used to formulate the problem as a system of singular integral equations with singularities of the form r^{-3} using the stress field induced by a force doublet in an infinite body as fundamental solution. In the numerical calculation, unknown body force densities are approximated by using fundamental density functions and polynomials. The present method yields rapidly converging numerical results for various aspect ratios of a rectangular crack. Distributions of stress intensity factors are indicated in tables and figures with varying the shape and Poisson's ratio. The maximum stress intensity factors $K_{II\max}$ and $K_{III\max}$ are found to be controlled by the \sqrt{area} parameter in a similar way of the case of $K_{I\max}$.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Rectangular Crack, Singular Integral Equation, Numerical Analysis, Fundamental Density

1. 緒言

実際の機械構造物中の欠陥やき裂を、だ円板状き裂の解⁽¹⁾⁽²⁾で評価することは広く行われている。また、より一般的に、だ円とは大きく異なるき裂や欠陥から生じたき裂の応力拡大係数の最大値を評価するため、村上らは内部き裂に対して以下の式を提案している⁽³⁾⁽⁴⁾。

$$K_{I\max} = 0.50\sigma\sqrt{\pi\sqrt{area}} \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここで $area$ は、荷重軸方向に投影したき裂面積であり、この式はき裂が最大主応力方向に進展する場合を対象としている。しかし、実構造物における負荷は通常混合モードと考えられ、モードII荷重のみによって進展するき裂が存在することも指摘されている⁽⁵⁾。本研究では、このようなせん断負荷を含む一般的な荷重を受ける3次元き裂の厳密解が、だ円形以外に見当たらないことを考慮して長方形き裂の問題を取り扱う。

著者らの1人は、先に、長方形き裂がモードI荷重を受ける問題を体積力法の特異積分方程式で表現し、未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する方法により、その正確な応力拡大係数の分布を求めた⁽⁶⁾。そこで本研究では、前報の方法を応用し、図1のように、遠方でせん断応力を受ける長方形き裂の解析を行

う。そして、き裂前縁での K_{II} と K_{III} の値の分布を正確に求めるとともに、 \sqrt{area} と応力拡大係数の最大値 $K_{II\max}$, $K_{III\max}$ の関係を考察する。せん断荷重を受ける場合には解はモードI荷重と異なり、ポアソン比の影響を受けるので、その影響も考察する必要がある。なお、図1の問題の K_{II} の解析はKassir⁽⁷⁾によっても行われているが、 K_{III} は求められていない。

2. 体積力法の特異積分方程式

xy 平面上に縦 $2b$ 、横 $2a$ の長方形き裂を有する無限体の $o-xyz$ 座標系を定義する。 x, y, z 方向に広がる無限体が、 $|x| \rightarrow \infty, |y| \rightarrow \infty$ で一様なモードIIのせん断応力 $\tau_{yz}^{(\infty)} = 1$ を受ける場合を解析の対象とする。このとき問題は、き裂が存在しない無限体中において、き裂となるべき仮想境界上に分布させた yz 方向のせん断の標準

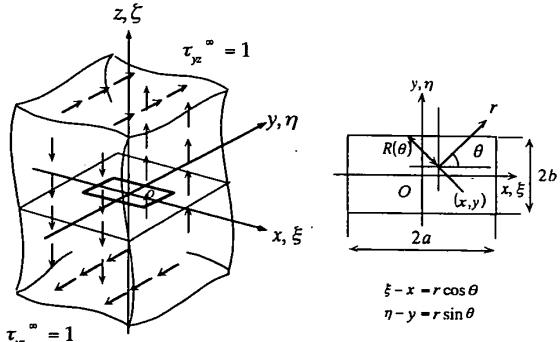


Fig.1 (a) A rectangular crack in a infinite body.
(b) Change of integral parameter from (ξ, η) to (r, θ) .

* 原稿受付 2001年9月25日。

^{*1} 正員、九州工業大学工学部(〒804-8550 北九州市戸畠区仙水町1-1)。^{*2} 九州工業大学大学院。

E-mail : noda@mech.kyutech.ac.jp

型体積力対の密度 $f_{yz}(\xi, \eta)$, zx 向のせん断の標準型体積力対の密度 $f_{xz}(\xi, \eta)$ を未知関数とする以下の特異積分方程式で表現される。ここで (ξ, η, ζ) は着力点の (x, y, z) 座標である。また ν はポアソン比であり、 \iint_S は発散積分の有限部分を表す。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[\iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(y-\eta)^2}{r_1^5} \right\} f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} f_{xz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = -\tau_{yz}^\infty \end{aligned} \right\} \quad \dots(2 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[\iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(x-\xi)^2}{r_1^5} \right\} f_{xz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots(2 \cdot b)$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \\ S &= \{(\xi, \eta) \mid -a \leq \xi \leq a, -b \leq \eta \leq b\} \end{aligned} \right\} \quad \dots(2 \cdot c)$$

式(2)は仮想き裂上における境界条件 $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{xz} = 0$ に相当している。 S はき裂のない無限体中に想定した長方形き裂となるべき仮想き裂面を表している。

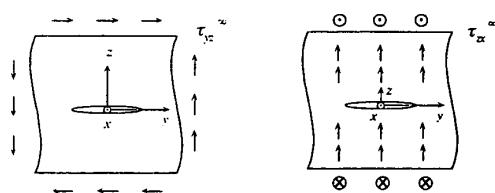
3. 特異積分方程式の数値解析法

分布している体積力対密度は連続で滑らかなはずであると考え、本論文では以下のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} f_{yz}(\xi, \eta) &= F_{yz}(\xi, \eta)w_{yz}(\xi, \eta), \quad f_{xz}(\xi, \eta) = F_{xz}(\xi, \eta)w_{xz}(\xi, \eta) \\ w_{yz}(\xi, \eta) &= 2(1-\nu)\tau_{yz}^\infty \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} \\ w_{xz}(\xi, \eta) &= 2\tau_{xz}^\infty \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots(3)$$

式(3)では、2次元き裂（平面ひずみ）が τ_{yz}^∞ , τ_{xz}^∞ を受ける場合（図2）を表現する体積力密度がそれぞれ $w_{yz}(\xi, \eta) = 2(1-\nu)\tau_{yz}^\infty \sqrt{b^2 - \eta^2}$, $w_{xz}(\xi, \eta) = 2\tau_{xz}^\infty \sqrt{b^2 - \eta^2}$ となることを考慮している（本研究における実際の数値解析では $\tau_{yz}^\infty = \tau_{xz}^\infty = 1$ とおく）。このとき式(2)は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \left[\iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(y-\eta)^2}{r_1^5} \right\} F_{yz}(\xi, \eta) \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} F_{xz}(\xi, \eta) \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} d\xi d\eta \right] = -1 \end{aligned} \right\} \quad \dots(4 \cdot a)$$



$$(a) w_{yz}(\xi, \eta) = 2(1-\nu)\tau_{yz}^\infty \sqrt{b^2 - \eta^2} \quad (b) w_{xz}(\xi, \eta) = 2\tau_{xz}^\infty \sqrt{b^2 - \eta^2}$$

Fig.2 Fundamental densities w_{yz}, w_{xz} for two-dimensional problems.

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \left[\iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} F_{yz}(\xi, \eta) \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(x-\xi)^2}{r_1^5} \right\} F_{xz}(\xi, \eta) \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} d\xi d\eta \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots(4 \cdot b)$$

ここで重み関数 $F_{yz}(\xi, \eta)$, $F_{xz}(\xi, \eta)$ としては x 軸に関する逆対称性、連續性等を考慮した多項式を用いる。具体的には多項式に含まれる係数 β_i , γ_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n(n+2)$) を未知数とする。 ξ, η について $2n$ 次までの以下のような表現を採用した。

$$\begin{aligned} F_{yz}(\xi, \eta) &= \beta_0 + \beta_1 \eta^2 + \dots + \beta_{n-1} \eta^{2(n-1)} + \beta_n \eta^{2n} \\ &+ \beta_{n+1} \xi^2 + \beta_{n+2} \xi^2 \eta^2 + \dots + \beta_{2n} \xi^2 \eta^{2n} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &+ \beta_{n-n-1} \xi^{2n} + \beta_{n-n} \xi^{2n} \eta^2 + \dots + \beta_{n-1} \xi^{2n} \eta^{2n} \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i G_i(\xi, \eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{xz}(\xi, \eta) &= \gamma_0 \xi \eta + \gamma_1 \xi \eta^3 + \dots + \gamma_{n-1} \xi \eta^{2n-1} + \gamma_n \xi \eta^{2n+1} \\ &+ \gamma_{n+1} \xi^3 \eta + \gamma_{n+2} \xi^3 \eta^3 + \dots + \gamma_{2n} \xi^3 \eta^{2n+1} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &+ \gamma_{n-n-1} \xi^{2n+1} \eta + \gamma_{n-n} \xi^{2n+1} \eta^3 + \dots + \gamma_{n-1} \xi^{2n+1} \eta^{2n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i Q_i(\xi, \eta), \quad l = (n+1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_0(\xi, \eta) &= 1, \quad G_1(\xi, \eta) = \eta^2, \dots \\ &\dots, G_{n+1}(\xi, \eta) = \xi^2, \dots, G_{l-1}(\xi, \eta) = \xi^{2n} \eta^{2n} \\ Q_0(\xi, \eta) &= \xi \eta, \quad Q_1(\xi, \eta) = \xi \eta^3, \dots \\ &\dots, Q_{n+1}(\xi, \eta) = \xi^3 \eta, \dots, Q_{l-1}(\xi, \eta) = \xi^{2n+1} \eta^{2n+1} \end{aligned}$$

式(4), 式(5)より次式が得られ、問題は式(5)で示される多項式 $F_{yz}(\xi, \eta)$, $F_{xz}(\xi, \eta)$ の $\beta_0 \sim \beta_{l-1}$, $\gamma_0 \sim \gamma_{l-1}$ の $2 \cdot (n+1)^2$ 個の係数 β_i , γ_i を未知数とする連立一次方程式を解くことに帰する。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \sum_{i=0}^{l-1} [\beta_i B_{yz,i}^{f_r} + \gamma_i B_{yz,i}^{f_z}] = -1 \\ & \frac{1}{4\pi} \sum_{i=0}^{l-1} [\beta_i C_{xz,i}^{f_r} + \gamma_i C_{xz,i}^{f_z}] = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots(6 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} B_{yz,i}^{f_r} &= \iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(y-\eta)^2}{r_1^5} \right\} G_i(\xi, \eta) \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} d\xi d\eta \\ B_{yz,i}^{f_z} &= \iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} \frac{Q_i(\xi, \eta)}{(1-\nu)} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} d\xi d\eta \\ C_{xz,i}^{f_r} &= \iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} G_i(\xi, \eta) \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} d\xi d\eta \\ C_{xz,i}^{f_z} &= \iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(x-\xi)^2}{r_1^5} \right\} \frac{Q_i(\xi, \eta)}{(1-\nu)} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} d\xi d\eta \end{aligned} \quad \dots(6 \cdot b)$$

4. 特異積分の処理について

式(6·b)の積分を実行するとき、注目点 (x, y) と着力点 (ξ, η) が一致するとき、特異性を有するため以下のようない方法によりその値を正確に求める。まず特異積分 $B_{yz,i}^{f_r}$, $B_{yz,i}^{f_z}$, $C_{xz,i}^{f_r}$, $C_{xz,i}^{f_z}$ に含まれる被積分関数の構成要

素 $(a^2 - \xi^2)^{1/2} (b^2 - \eta^2)^{1/2}$, ξ^{2n} , η^{2n} をそれぞれ以下のように分ける。

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - \xi^2} &= P_0(x) - (\xi - x)P_1(x) - (\xi - x)^2 P_2(\xi, x) \\ \sqrt{b^2 - \eta^2} &= Q_0(y) - (y - \eta)Q_1(y) - (y - \eta)^2 Q_2(\eta, y) \\ \xi^{2n} &= x^{2n} + 2nx^{2n-1} \cdot (\xi - x) + \sum_{i=0}^{2n-2} \{(i+1) \cdot \xi^{(2n-2-i)} \cdot x^i\} (\xi - x)^2 \\ \eta^{2n} &= y^{2n} + 2ny^{2n-1} \cdot (y - \eta) + \sum_{i=0}^{2n-2} \{(i+1) \cdot \eta^{(2n-2-i)} \cdot y^i\} (y - \eta)^2 \\ \xi^{2n+1} &= x^{2n+1} + (2n+1)x^{2n} \cdot (\xi - x) + \sum_{i=0}^{2n-1} \{(i+1) \cdot \xi^{(2n-1-i)} \cdot x^i\} (\xi - x)^2 \\ \eta^{2n+1} &= y^{2n+1} + (2n+1)y^{2n} \cdot (y - \eta) + \sum_{i=0}^{2n-1} \{(i+1) \cdot \eta^{(2n-1-i)} \cdot y^i\} (y - \eta)^2 \\ P_0(x) &= \sqrt{a^2 - x^2}, \quad P_1(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad P_2(\xi, x) = \\ &\cdot \frac{\xi + x}{\sqrt{a^2 - x^2} (\sqrt{a^2 - \xi^2} + \sqrt{a^2 - x^2})} \times \frac{a^2}{(\xi \sqrt{a^2 - x^2} + x \sqrt{a^2 - \xi^2})} \\ Q_1(x) &= \frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}}, \quad Q_0(y) = \sqrt{b^2 - y^2}, \quad Q_2(\eta, y) = \\ &\cdot \frac{\eta + y}{\sqrt{b^2 - y^2} (\sqrt{b^2 - \eta^2} + \sqrt{b^2 - y^2})} \times \frac{b^2}{(\eta \sqrt{b^2 - y^2} + y \sqrt{b^2 - \eta^2})} \end{aligned} \quad \dots \quad (7)$$

ここで重要なことは、上記のそれぞれの構成要素を $(\xi - x)$ もしくは $(\eta - y)$ についての関数と見たとき、零次、1次の係数が注目点の位置 (x, y) のみにより決定され積分変数 ξ, η に無関係な形で表されることである。

次に $(\xi - x) = r \cdot \cos \theta, (\eta - y) = r \cdot \sin \theta$ (図1.(b)参照) により注目点 (x, y) を原点とする極座標に変換することで式を得る。

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} &= E_0 + E_1(\theta) \cdot r + E_2(r, \theta) \cdot r^2 \\ \xi^{2i} &= B_{0i} + B_{1i}(\theta) \cdot r + B_{2i}(r, \theta) \cdot r^2 \\ \eta^{2i} &= C_{0i} + C_{1i}(\theta) \cdot r + C_{2i}(r, \theta) \cdot r^2 \end{aligned} \quad \dots \quad (8)$$

$E_0, E_1(\theta)$ を例にとって式(9)のように表される。

$$\begin{aligned} E_0 &= P_0 Q_0 = \sqrt{a^2 - b^2} \\ E_1(\theta) &= -P_0 Q_0 \cos \theta - P_0 Q_1 \sin \theta \\ &= -\frac{x \sqrt{b^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cos \theta - \frac{y \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{b^2 - y^2}} \sin \theta \end{aligned} \quad \dots \quad (9)$$

よって、式(6・b)の $B_{yz,i}^{f_n}$ における基本密度関数と重み関数の積は次のように表される。

$$\begin{aligned} G_i(\xi, \eta) \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} &= D_{0i} + D_{1i}(\theta) \cdot r + D_{2i}(r, \theta) \cdot r^2 \\ &+ D_{3i}(r, \theta) \cdot r^3 + D_{4i}(r, \theta) \cdot r^4 \\ &+ D_{5i}(r, \theta) \cdot r^5 + D_{6i}(r, \theta) \cdot r^6 \end{aligned} \quad (10)$$

$D_{0i}, D_{1i}(\theta)$ は $E_0, E_1(\theta), B_{0i}, B_{1i}(\theta), C_{0i}, C_{1i}(\theta)$ の組合せにより、また $D_{2i}(r, \theta) \sim D_{6i}(r, \theta)$ は $E_0 \sim C_{2i}(r, \theta)$ の組合せにより表せられる。式(10)を式(6・b)に代入し、積分変数についても同様の座標変換を行なえば、式(6・b)

は結局以下の二種類の積分に帰着される。

$$A_i = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2} G_i(\xi, \eta) \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} dr d\theta = A_{ai} + A_{bi} \quad (11 \cdot a)$$

ここで、 A_i を例にとって、 $A_i = A_{ai} + A_{bi}$ として

$$\begin{aligned} A_{ai} &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\frac{D_{0i}}{r^2} + \frac{D_{1i}(\theta)}{r} \right] dr d\theta \\ A_{bi} &= \int_0^{2\pi} \int_0^R [D_{2i}(r, \theta) + D_{3i}(r, \theta) \cdot r + D_{4i}(r, \theta) \cdot r^2 \\ &+ D_{5i}(r, \theta) \cdot r^3 + D_{6i}(r, \theta) \cdot r^4] dr d\theta \end{aligned} \quad (11 \cdot b)$$

A_{bi} は特異性がないので数値積分によりその値を求める。 A_{ai} は $r \rightarrow 0$ で特異性を有するが、被積分関数が特異性を有する方向の積分定数 r について -1乗、 -2乗だけの形で表せているため Hadamard の有限部分の概念 (Pf 積分) を用いて次式のように表すことができる。

$$A_{ai} = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{D_{0i}}{R(\theta)} + D_{1i}(\theta) \cdot \log(R(\theta)) \right] d\theta \quad (12)$$

ここで $R(\theta)$ は図1.(b)に示すように注目点 (x, y) とき裂境界との距離を表す。こうして結局 A_{ai} は特異性のない線積分として通常の数値積分で求めることができるようになる。 A'_i も A_i と同様に求めることができる。

5. 数値計算結果と検討

5.1 解の収束性と境界条件の満足度 以上の理論に基づいて、計算プログラムを作成し、多項式の次数のパラメータ n を変化させて形状比 $b/a = 8.0 \sim 0.125$ 、ポアソン比 $\nu = 0 \sim 0.5$ について数値計算を行った。式(6), (11), (12)の数値積分には、二重指數関数型積分公式等のサブルーチンを用いて計算した。また結果として得られた $y = b, x = a$ 上の各々の応力拡大係数 K_{II} , K_{III} をまとめたのに、無限板中の長さ $2b, 2a$ の二次元き裂の応力拡大係数 $\tau_{yz} \propto \sqrt{\pi b}, \tau_{yz} \propto \sqrt{\pi a}$ で無次元化した値である F_{II}, F_{III} を用いた。また、応力拡大係数の最大値 $K_{II\max}, K_{III\max}$ を議論する際には、 \sqrt{area} で整理した $F_{II\max}^*, F_{III\max}^*$ も使用した ($area = \text{き裂面積}$)。

$$F_{II} = \frac{K_{II}(\xi, \eta) \Big|_{\xi=\xi, \eta=\eta}}{\tau_{yz} \propto \sqrt{\pi b}} = \sqrt{a^2 - \xi^2} F(\xi, \eta) \Big|_{\xi=\xi, \eta=\eta} \quad (13 \cdot a)$$

$$F_{III} = \frac{K_{III}(\xi, \eta) \Big|_{\xi=\xi, \eta=\eta}}{\tau_{yz} \propto \sqrt{\pi a}} = \sqrt{b^2 - \eta^2} F(\xi, \eta) \Big|_{\xi=\xi, \eta=\eta} \quad (13 \cdot b)$$

$$F_{II\max}^* = \frac{K_{II\max}}{\tau_{yz} \propto \sqrt{\pi \sqrt{area}}}, \quad F_{III\max}^* = \frac{K_{III\max}}{\tau_{yz} \propto \sqrt{\pi \sqrt{area}}} \quad (13 \cdot c)$$

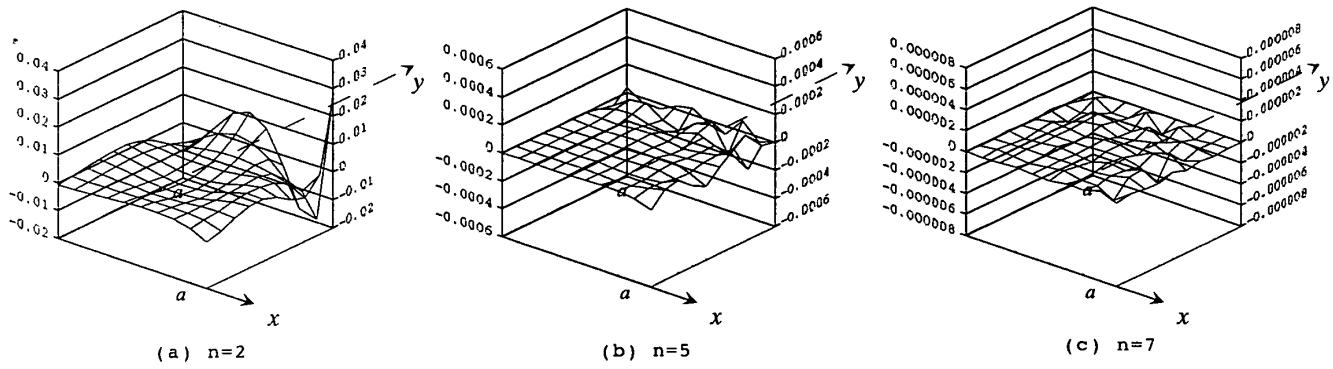
ここで注目点の選び方としてはき裂前縁の位置を一辺 a の正方形に写像して、選点数が x, y 軸方向にそれぞれ $m \times m$ であるとき、 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a$ の範囲で一辺を $(m+1)$ 等分するメッシュを x 軸, y 軸について切る。そしてメッシュの $m \times m$ 個の交点が境界条件を考える注目点とする。式(6)で表される連立一次方程式を解

Table 1 Convergence of the results F_{II} ($b/a = 1.0, \nu = 0.3$, Number of collocation points 10×10).

x/a n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
2	0.84632	0.84313	0.83388	0.81938	0.80061	0.77805	0.75055	0.71304	0.65152	0.52658	0.00000
3	0.83912	0.83767	0.83273	0.82282	0.80614	0.78139	0.74813	0.70565	0.64732	0.53886	0.00000
4	0.84186	0.83944	0.83243	0.82110	0.80502	0.78231	0.74997	0.70505	0.64367	0.54204	0.00000
5	0.84099	0.83899	0.83274	0.82160	0.80497	0.78193	0.75021	0.70552	0.64210	0.54186	0.00000
6	0.84116	0.83906	0.83266	0.82156	0.80502	0.78194	0.75028	0.70585	0.64140	0.53965	0.00000
7	0.84119	0.83906	0.83263	0.82155	0.80504	0.78189	0.75026	0.70618	0.64139	0.53814	0.00000

Table 2 Convergence of the results F_{II} ($b/a = 0.25, \nu = 0.3$, Number of collocation points 10×10).

x/a n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
2	1.00274	1.00015	0.99311	0.98353	0.97395	0.96627	0.95968	0.94665	0.90427	0.76706	0.00000
3	0.98761	0.98840	0.98991	0.98988	0.98571	0.97561	0.95918	0.93546	0.89375	0.77868	0.00000
4	0.99256	0.99164	0.98934	0.98655	0.98313	0.97679	0.96312	0.93682	0.88960	0.78051	0.00000
5	0.99095	0.99081	0.98997	0.98756	0.98300	0.97568	0.96299	0.93814	0.88913	0.78080	0.00000
6	0.99157	0.99104	0.98965	0.98740	0.98336	0.97584	0.96261	0.93834	0.88931	0.78120	0.00000
7	0.99120	0.99097	0.98988	0.98737	0.98318	0.97601	0.96268	0.93821	0.88959	0.78129	0.00000

Fig. 3 Compliance of boundary condition $\tau_{xy} = 0$ when $b/a=1.0, \nu=0.3$.Table 3 Dimensionless stress intensity factors F_{II} along the crack front $y=b$ when $\nu=0.3$ in Fig. 1(n=7).

x/a b/a	0 (Kassir:[7])	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
8.000	0.120 (-)	0.120	0.119	0.118	0.116	0.112	0.107	0.099	0.088	0.067	0.000
4.000	0.239 (-)	0.238	0.236	0.232	0.227	0.220	0.212	0.200	0.181	0.145	0.000
2.000	0.466 (-)	0.464	0.460	0.453	0.443	0.429	0.410	0.384	0.350	0.293	0.000
1.000	0.841 (0.831)	0.839	0.833	0.822	0.805	0.782	0.750	0.706	0.641	0.538	0.000
0.500	0.955 (0.940)	0.954	0.949	0.942	0.929	0.911	0.883	0.842	0.777	0.661	0.000
0.250	0.991 (0.987)	0.991	0.990	0.987	0.983	0.976	0.963	0.938	0.890	0.781	0.000
0.125	0.998 (-)	0.998	0.998	0.998	0.997	0.996	0.992	0.985	0.964	0.890	0.000

Table 4 Dimensionless stress intensity factors F_{III} along the crack front $x=a$ when $\nu=0.3$ in Fig. 1(n=7).

y/b b/a	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
8.000	0.995	0.995	0.995	0.993	0.991	0.988	0.980	0.965	0.931	0.836	0.000
4.000	0.953	0.951	0.947	0.940	0.927	0.909	0.881	0.839	0.772	0.653	0.000
2.000	0.839	0.837	0.931	0.819	0.802	0.778	0.746	0.700	0.635	0.530	0.000
1.000	0.654	0.653	0.647	0.637	0.622	0.602	0.576	0.539	0.488	0.408	0.000
0.500	0.335	0.334	0.331	0.326	0.318	0.308	0.295	0.278	0.252	0.205	0.000
0.250	0.168	0.168	0.166	0.164	0.161	0.156	0.150	0.140	0.124	0.095	0.000
0.125	0.086	0.086	0.085	0.083	0.081	0.077	0.072	0.066	0.057	0.042	0.000

Table 5 $F_{II, \max}$ vs. b/a and ν for a rectangular crack in an infinite body [():Kassir⁽⁷⁾].

b/a	ν					
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
8.000	0.102	0.108	0.114	0.120	0.129	0.139
4.000	0.203	0.213	0.225	0.239	0.255	0.274
2.000	0.400	0.419	0.441	0.466	0.494	0.525
1.000	0.753	0.781	0.810	0.841	0.874	0.910
	(0.759)	(0.796)	(0.831)	(0.866)		
0.500	0.906	0.922	0.938	0.955	0.971	0.987
	(0.908)	(0.926)	(0.940)	(0.966)		
0.250	0.978	0.982	0.987	0.991	0.996	0.999
	(0.973)	(0.984)	(0.987)	(0.996)		
0.125	0.995	0.996	0.997	0.998	0.999	1.000

Table 6 $F_{III, \max}$ vs. b/a and ν for a rectangular crack in an infinite body.

b/a	ν					
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
8.000	0.995	0.994	0.992	0.990	0.987	0.982
4.000	0.977	0.971	0.963	0.953	0.939	0.919
2.000	0.903	0.888	0.866	0.840	0.805	0.762
1.000	0.753	0.725	0.692	0.654	0.610	0.556
	(0.759)	(0.796)	(0.831)	(0.866)		
0.500	0.400	0.380	0.359	0.335	0.308	0.277
	(0.400)	(0.380)	(0.359)	(0.335)		
0.250	0.203	0.192	0.181	0.168	0.154	0.138
	(0.203)	(0.192)	(0.181)	(0.168)		
0.125	0.102	0.097	0.092	0.085	0.079	0.071

くには、注目点それぞれに対し残留する応力の数値ができる限り小さくなるように、最小二乗法を用いる。

まずポアソン比 $\nu = 0.3$ 、形状比 $b/a = 1.0, 0.25$ 、選点数 10×10 のき裂について、近似する式(5)の多項式の次数 n を変化させたときのき裂前縁に沿った応力拡大係数 F_H の収束性をそれぞれ表1, 2に示す。表1, 2はいずれも有効数字3けた程度で収束している。また、 F_{III} についても同様な収束性を確認した。

次に形状比 $b/a = 1.0$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、選点数 10×10 の場合、未知関数 $F_{yz}(\xi, \eta)$, $F_x(\xi, \eta)$ の多項式の次数 n を変化させたときの τ_{yz} の境界条件の満足度を図3に示す。次数を $n = 2$ から増加させるにつれて境界条件の満足度はよくなり、 $n = 7$ のときにき裂面上のすべての点で境界条件は 2×10^{-5} 以下で満足されている。また、 τ_x についても同様に良好な境界条件の満足度を確認した。表1, 2と図3の検討は他の a/b , ν に対しても行ったが、いづれも同様な精度が得られた。

5.2 応力拡大係数の分布とその最大値 $K_{II,max}$, $K_{III,max}$

き裂の形状比 $b/a = 8.0 \sim 0.125$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ の場合のき裂前縁 $y = b$ 上に沿った F_H の値を表3に、 $x = a$ 上に沿った F_{III} の値を表4に示す。またそれらに

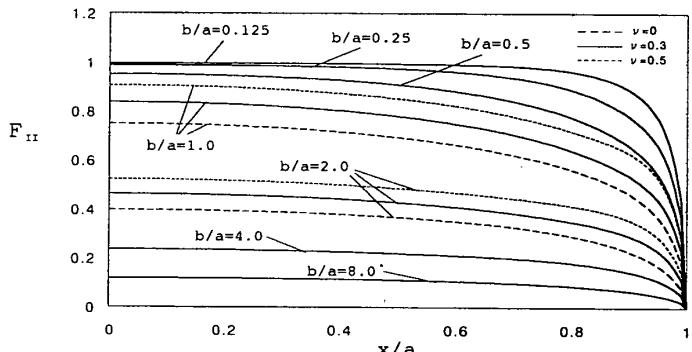


Fig. 4 Variation of dimensionless stress intensity factors F_H along the crack front $y=b$ when $\nu = 0, 0.3, 0.5$ ($F_H = K_{II}/\tau_{yz} \sqrt{\pi b}$).

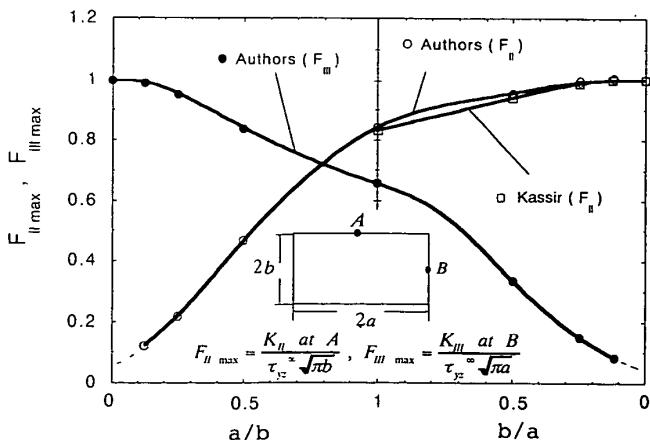


Fig. 6 $F_{H,\max}$ and $F_{III,\max}$ vs. b/a or a/b for a rectangular crack in an infinite body when $\nu = 0.3$.

$\nu = 0, 0.5$ の結果を加えてグラフ化して図4, 5に示す。次に表5, 6および図6にき裂の形状比とポアソン比を変化させた場合の F_H , F_{III} の最大値をKassir⁽⁷⁾の解析結果と比較して示す。Kassirの結果には最大で2.8%程度の誤差があることがわかる。また長方形き裂の形状比がどの程度で2次元き裂とみなせるかを調べると、形状比 $b/a = 0.125$ で $F_{H,\max} = 0.995 \sim 1.000 \approx 1$ である。また、 $b/a = 8.0$ で $F_{III,\max} = 0.982 \sim 0.995 \approx 1$ である。図1の長方形き裂が $\sigma_z^\infty = 1$, $\tau_{yz}^\infty = 0$ を受ける場合の F_I と b/a の関係を表7に示す⁽⁶⁾。この場合にも $a/b = 1/8$ で $F_I = 0.995 \approx 1$ である。

5.3 $K_{II,max}$, $K_{III,max}$ と \sqrt{area} の関係について 表8, 9 にき裂の形状比とポアソン比を変化させた場合の応力拡大係数を村上らの提案するパラメータ \sqrt{area} で整理した F_H^* , F_{III}^* の最大値を示す。表8に示すように、 $F_{H,\max}^*$ は b/a とポアソン比 ν に依存して変化するが、 $b/a \leq 1$ において、 $F_{H,\max}^* = 0.47 \sim 0.64 \approx 0.55$ である。また、表9に示すように、 $F_{III,\max}^*$ も b/a と ν に依存するが、 $b/a \geq 1$ において、 $F_{III,\max}^* = 0.39 \sim 0.53 \approx 0.45$ である。参考のために、表10と表11に同様にして整理した遠方でせん断応力 τ_{yz}^∞ を受けるだ円形き裂の結果を示す⁽²⁾。この場合にも $b/a \leq 1$ において、 $F_{H,\max}^* = 0.46 \sim 0.64 \approx 0.55$ であり、 $b/a \geq 1$ で、 $F_{III,\max}^* = 0.32 \sim 0.52 \approx 0.42$ である。よって、一般に図7に示すように、 τ_{yz}^∞ を受ける3次元き裂において、

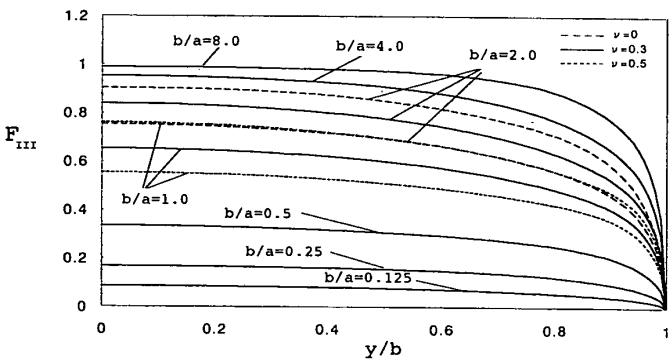
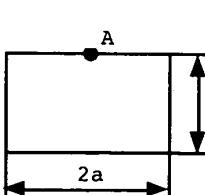


Fig. 5 Variation of dimensionless stress intensity factors F_{III} along the crack front $x=a$ when $\nu = 0, 0.3, 0.5$ ($F_{III} = K_{III}/\tau_{yz} \sqrt{\pi a}$).

Table 7 F_I at A vs. b/a in Fig. 1 when $\sigma_z^\infty = 1$, $\tau_{yz}^\infty = 0$ independent of Poisson's ratio.

$$F_I \text{ at } A = \frac{K_I \text{ at } A}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi b}} \quad F_I^* \text{ at } A = \frac{K_I \text{ at } A}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi \sqrt{area}}}$$



b/a	F_I at A	F_I^* at A
8.000	0.102	0.136
4.000	0.202	0.202
2.000	0.400	0.336
1.000	0.753	0.533
0.500	0.906	0.539
0.250	0.976	0.489
0.125	0.995	0.471

$b/a \leq 1$ で $F_{II\max} \approx 0.55$, $b/a \geq 1$ で $F_{III\max} \approx 0.45$ が成立するものと考えられる。

6. 結 言

(1) 長方形き裂が遠方でせん断荷重を受ける問題を体積力法の特異積分方程式を解析して考察した。未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似することによって比較的少ない選点数(10×10)で良好な収束

Table 8 $F_{II\max}$ vs. b/a and ν for a rectangular crack in an infinite body. $F_{II\max} = K_{II\max} / \tau_{yz}^{\infty} \sqrt{\pi \text{area}}$ (area = $4ab$, if $b/a \leq 0.2$ area = $20b^2$, if $b/a \geq 5.0$ area = $20a^2$)

b/a	ν					
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
8.000	0.1079	0.1142	0.1205	0.1269	0.1364	0.1469
4.000	0.2030	0.2130	0.2250	0.2390	0.2550	0.2740
2.000	0.3364	0.3523	0.3708	0.3919	0.4154	0.4415
1.000	0.5325	0.5523	0.5728	0.5947	0.6180	0.6435
0.500	0.5387	0.5482	0.5577	0.5678	0.5774	0.5869
0.250	0.4890	0.4910	0.4935	0.4955	0.4980	0.4995
0.125	0.4705	0.4710	0.4715	0.4719	0.4724	0.4729
$\rightarrow 0$	0.4729	0.4729	0.4729	0.4729	0.4729	0.4729

Table 9 $F_{III\max}$ vs. b/a and ν for a rectangular crack in an infinite body. $F_{III\max} = K_{III\max} / \tau_{yz}^{\infty} \sqrt{\pi \text{area}}$ (area = $4ab$, if $b/a \leq 0.2$ area = $20b^2$, if $b/a \geq 5.0$ area = $20a^2$)

b/a	ν					
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\rightarrow \infty$	0.4729	0.4729	0.4729	0.4729	0.4729	0.4729
8.000	0.4705	0.4700	0.4691	0.4681	0.4667	0.4644
4.000	0.4885	0.4855	0.4815	0.4765	0.4695	0.4595
2.000	0.5369	0.5280	0.5149	0.4995	0.4787	0.4531
1.000	0.5325	0.5127	0.4893	0.4624	0.4313	0.3932
0.500	0.3364	0.3195	0.3019	0.2817	0.2590	0.2329
0.250	0.2030	0.1920	0.1810	0.1680	0.1540	0.1380
0.125	0.1213	0.1154	0.1094	0.1011	0.0939	0.0844

Table 10 $F_{II\max}$ vs. b/a and ν for an elliptical crack in an infinite body. $F_{II\max} = K_{II\max} / \tau_{yz}^{\infty} \sqrt{\pi \text{area}}$ (area = πab , if $b/a \leq 0.2$ area = $20b^2$, if $b/a \geq 5.0$ area = $20a^2$)

b/a	ν					
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
8.000	0.1633	0.1807	0.2022	0.2296	0.2655	0.3148
4.000	0.2477	0.2720	0.3016	0.3382	0.3852	0.4471
2.000	0.3688	0.3982	0.4329	0.4740	0.5238	0.5853
1.000	0.4782	0.5033	0.5313	0.5626	0.5977	0.6376
0.500	0.5215	0.5355	0.5502	0.5657	0.5822	0.5995
0.250	0.4955	0.5009	0.5064	0.5121	0.5178	0.5237
0.125	0.4619	0.4636	0.4654	0.4672	0.4690	0.4708
$\rightarrow 0$	0.4729	0.4729	0.4729	0.4729	0.4729	0.4729

Table 11 $F_{III\max}$ vs. b/a and ν for an elliptical crack in an infinite body. $F_{III\max} = K_{III\max} / \tau_{yz}^{\infty} \sqrt{\pi \text{area}}$ (area = πab , if $b/a \leq 0.2$ area = $20b^2$, if $b/a \geq 5.0$ area = $20a^2$)

b/a	ν					
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\rightarrow \infty$	0.4729	0.4729	0.4729	0.4729	0.4729	0.4729
8.000	0.4619	0.4600	0.4576	0.4546	0.4506	0.4452
4.000	0.4955	0.4896	0.4825	0.4736	0.4622	0.4471
2.000	0.5215	0.5069	0.4897	0.4692	0.4444	0.4138
1.000	0.4782	0.4530	0.4251	0.3938	0.3587	0.3188
0.500	0.3688	0.3408	0.3112	0.2800	0.2470	0.2120
0.250	0.2477	0.2254	0.2026	0.1792	0.1553	0.1310
0.125	0.1633	0.1475	0.1316	0.1156	0.0995	0.0832

性(表1, 2)と境界条件の満足度(図3)と滑らかな応力拡大係数の分布(図4, 5)が種々の形状比**a/b**とポアソン比νに対して得られた。

(2)長方形き裂の形状比**a/b**とポアソン比νを系統的に変化させた場合の最大応力拡大係数と応力拡大係数の分布を図表に示した(表5, 6, 図4~6)。Kassir⁽⁷⁾の結果には、最大で2.8%程度の誤差があることがわかった。また、長方形き裂の形状比がどの程度で2次元き裂とみなせるかを検討した結果、形状比**a/b**=1/8で**F_{II}**_{max}=0.995~1.000で、**a/b**=8.0で**F_{III}**_{max}=0.982~0.995であり、ほぼ**F_{II}**=1, **F_{III}**=1であることがわかった。

(3)せん断応力を受けるだ円形き裂と長方形き裂を考察した結果、一般に任意の3次元き裂のアスペクト比≤1の場合において、 $K_{II\max} \approx 0.55 \tau_{yz}^{\infty} \sqrt{\pi \text{area}}$ が成立する。また、アスペクト比≥1の場合において、 $K_{II\max} \approx 0.45 \tau_{yz}^{\infty} \sqrt{\pi \text{area}}$ が成立する(図7)。

論文のまとめを手伝っていただいた大学院学生鍵田雅幸君に深く感謝いたします。

文 献

- Irwin, G. R. Crack-Extension Force for a Part-Through Crack in a Plate, *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, **29**(1962), 651-654.
- Kassir, M. K. and Sih, G. C. Three-Dimensional Stress Distribution around an Elliptical Crack under Arbitrary Loadings. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, **33**(1966), 601-611.
- 村上敬宜・児玉昭太郎・小沼静代. 高強度鋼の疲労強度に及ぼす介在物の影響の定量的評価法. 機論, **54-500**, A(1988), 688-6960.
- 村上敬宜・石田誠, 任意形状表面き裂の応力拡大係数の解析と表面近傍の応力場, 機論, **51-464**, A(1985), 1050-1056.
- 大小森義洋・宋中・村上敬宜・補強ロールのスボーリングにおけるモードIIき裂の進展挙動の解析, 材料, **50-3**, A(2001), 249-254
- 王清・野田尚昭・本田昌章・陳夢成, 特異積分方程式法による長方形き裂の応力拡大係数の分布の解析, 機論, **66-650**, A(2000), 104-109(但し, **a/b**>1の結果の表示に誤りがあるので表7に正しい値を示した).
- Kassir, M.K., A Three-Dimensional Rectangular Crack Subjected to Shear Loading, *Int. J. Solid. Struct.*, **18-12**(1982), 1075-1082.

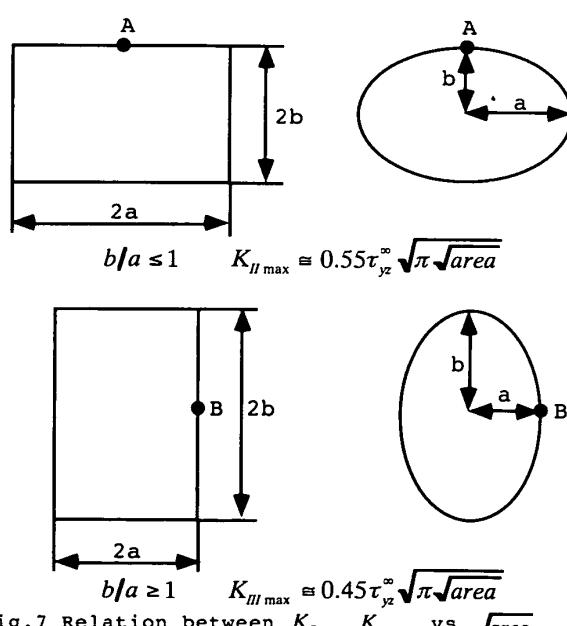


Fig.7 Relation between $K_{II\max}$, $K_{III\max}$ vs. $\sqrt{\text{area}}$